Procena vrednosti-pod-rizikom korišćenjem multivarijacionih garch modela

UDK: 005.334:336.76 ; 330.43

Nebojša Nikolić[1], Vesna Manojlović[2]

[1] *Banca Intesa a.d., Beograd, nebojsa.nikolic@bancaintesabeograd.com*

[2] *Fakultet organizacionih nauka, Beograd, vesnam@fon.rs*

XII Internacionalni Simpozijum SymOrg 2010, 09.-12. Jun 2010, Zlatibor, Srbija

Metod Vrednost-pod-Rizikom (VaR) je globalno prihvaćen od strane menadžera rizika i regulatora kao alat za identifikaciju i kontrolu izloženosti tržišnom riziku. Bazel II regulativa koristi VaR metodologiju za izračunavanje kapitalnih zahteva za tržišne rizike kojem su izložene komercijalne banke. Cilj ovog rada je da se implementira multivarijaciona GARCH (mGARCH) metodologija kao interni VaR metod za merenje tržišnog rizika u komercijalnim bankama u Srbiji. PreTpostavljajući da su prinosi raspodeljeni po Normalnoj i Studentovoj-t distribuciji, parametri ortogonalnog mGARCH i CCC-mGARCH VaR modela su estimirani za svaki od 250 posmatranih dana za hipotetički trgovački portfolio koristeći metod maksimalne verodostojnosti. Nivoi kapitalnih zahteva su izračunati za implementirane metode i validacija je urađena koristeći Bazel II i Kupiec test.

1. Uvod

Upravljanje rizikom se razvija velikom brzinom, posebno pošto je Bazelski Komitet za bankarski nadzor počeo da primenjuje najnovije regulatorne standarde, poznate pod nazivom Bazel II. Osnovni cilj je da se uvede skup standarda za merenje rizika i upravljanje rizikom kojim će se primerenije meriti nivoi kapitalnih troškova koje banke i druge finansijske institucije moraju da drže kao sredstvo amortizacije u slučaju različitih vrsta rizika.

Regulativa Bazel II nudi ovim institucijama jedan podsticajan plan kako da razviju svoje interne modele za upravljanje rizikom. Preciznije govoreći, banke imaju izbor da koriste interne modele za merenje rizika, IMA pristup, i da tako određuju svoje kapitalno opterećenje. Smisao je u tome da banke budu u mogućnosti da preciznije mere svoju izloženost pojedinim rizicima u odnosu na opštu, namerno pojednostavljenu šemu koju nude regulatori.

Pored kreditnih poslova, vlasničko trgovanje koje je jedan od izvora rizika na tržištu, postalo je jedna od veoma značajnih aktivnosti banaka. U nestabilnom privrednom okruženju u kome su cene kapitala promenljive, ovi poslovi u velikoj meri izlažu banku tržišnom riziku. Stoga se javlja potreba za odgovarajućim modelima upravljanja rizikom i instrumentima kojima će se ovakvi rizici bolje kontrolisati i ublažiti.

Prema [4], tržišni rizik se definiše kao rizik gubitaka u bilansnim i vanbilansnim pozicijama koji se javlja kao posledica kretanja u okviru faktora tržišnih rizika. Glavni uzroci tržišnog rizika su rizici koji se odnose na instrumente u vezi sa kamatnim stopama, kapitalom, stranom valutom, derivatima i instrumentima koji se odnose na robu široke potrošnje. Šta više, upravljanje tržišnim rizikom trebalo di da bude redovna aktivnost banke, pod upravom odeljenja za upravljanje rizikom i nezavisno od trgovačkog sektora [3].

Po važećim regulatornim standardima u Srbiji banke su dužne da mere i prikazuju tržišni rizik u svojim trgovačkim knjigama, kao i da drže kapital kojim će pokriti eventualne gubitke. Narodna banka Srbije dala je skup predefinisanih regulatornih standarda u obliku tabelarnih izveštaja koje banke treba da podnose jednom mesečno. Ovaj nadzorni okvir jeste relativno konzervativan i propisuje troškove kapitala u vrednosti od 12 procenata ukupnih sredstava pod rizikom [17]. Postupci za izračunavanje ovih troškova kapitala dobrim delom su zasnovani na Standardizovanom pristupu Bazel II. Šta više, srpske banke su obavezne da u potpunosti prihvate standarde Bazel II do 2011. godine, čime će biti stimulisane da u budućnosti primenjuju naprednije pristupe i tako smanje troškove kapitala.

Izbor modela upravljanja tržišnim rizikom uopšte nije neki uniformni postupak. Isto tako, institucije koje usvajaju interne modele moraju da obezbede da ti modeli budu valjani. Savremena praksa upravljanja rizikom tržišta obuhvata različite metode „vrednosti-pod-rizikom" (VaR) koji su potpuno saglasni sa standardima Bazel II. Vrednost pod rizikom banke su sada prihvatile kao primarni metod za merenje rizika tržišta i on se sporazumno široko primenjuje. Ipak, postoje prilična neslaganja kad je reč o najboljem metodu za izračunavanje VaR. Teškoće u izračunavanju pouzdanih procena VaR proizilaze iz činjenice da svi postojeći modeli obuhvataju neke špekulacije, pretpostavke i pojednostavljenja. Stoga odrediti šta je najbolja metodologija za procenu VaR postaje empirijsko pitanje i pitanje primene.

U ovom radu razmatramo nekoliko mogućih multivarijacionih GERCH metodologija za naprednu procenu VaR u trgovačkom portfelju banke. Ove metodologije ćemo teorijski vrednovati i primeniti na portfelj sredstava kojima se trguje na srpskom tržištu kapitala koje hipotetički drži određena srpska banka.

Pored toga, svaki od VaR metoda koje ćemo pomenuti unet je u MATLAB tako da je procena automatizovana, a procena VaR može se vršiti za veliki broj finansijskih instrumenata u portfelju kojim se trguje.

2. Okvir vrednosti-pod-rizikom

Najznačajnija prednost VaR jeste u tome što sažima izloženost tržišnom riziku i pruža agregatni uvid u ukupni rizik portfelja. Proces procene VaR ipak obuhvata izbor dva značajna parametra: period držanja i stepen poverenja. Po definiciji, kod VaR se meri maksimalni gubitak u vrednosti portfelja usled nepovoljnih kretanja na tržištu u određenom periodu vremena, a uz dati stepen poverenja. Na primer, izračunali smo da je VaR = 50000 RSD za period držanja od 1 dan i stepen poverenja cl = 99%. Ovo pokazuje da gubitak u portfelju sigurno neće biti veći od 50000 RSD tokom narednog dana trgovanja, i to tvrdimo sa 99% verovatnoće. Za najveći broj aplikacija preporuka je da izabrani stepen poverenja bude od 95% do 99%, a da period držanja iznosi 1 do 10 dana[1].

Procena VaR predstavlja momenat distribucije profita i gubitka u portfelju i to takav da, ako pretpostavimo određenu verovatnoću i imamo na umu gubitke od 1 dan, nezvanično možemo da kažemo da VaR iznosi minimalnu sumu koju će banka da izgubi kad ima loš dan u trgovanju portfeljom, ili maksimalnu sumu koju očekuje da izgubi kad je dan povoljan. Uopšteno govoreći, modeli VaR obuhvataju četiri matematičke komponente:

Tehnika modelovanja VaR zasniva se na dva glavna pristupa. *Univarijaciona metodologija modelovanja VaR* jeste način za procenu VaR tako što se drži ili se pretpostavlja postojanje samo jedne vrste kapitala u trgovinskom portfelju banke, ili, alternativno, izračunavanjem i primenom jednog niza prinosa portfelja zasnovanog na ponderisanom zbiru prinosa komponenti portfelja. Ideja je da se procena VaR bazira na jedinstvenom nizu prinosa koji će obuhvatiti ponašanje svih komponenti faktora rizika. S druge strane, *multivarijaciono modelovanje VaR* pretpostavlja vremenske nizova prinosa svih sastavnih delova portfelja. Portfelji uglavnom imaju veliki broj n sredstava/imovine; stoga, da bismo izračunavanje VaR bazirali na uticaju rizika svakog dela portfelja, našom analizom moramo da obuhvatimo efekat n vremenskih nizova[2].

U ovom radu VaR izračunavamo po *multivarijacionoj* metodologiji. Da bismo dobili funkciju gustine verovatnoće $f_p(\cdot)$ utvrđenu hipotetičkim prinosima portfelja ili vremenskim serijama, prvi korak u modelovanju VaR jeste izračunavanje povraćaja po svakom delu kapitala iz portfelja, na sledeći način:

$$r_{i,t} = \left(P_{i,t} - P_{i,t-1}\right) / P_{i,t-1} \tag{1}$$

gde $r_{i,t}$ označava aritmetičku vrednost prinosa po kapitalu i u vremenu t, $P_{i,t}$ je cena kapitala i u vreme t a $P_{i,t-1}$ je cena kapitala i u vreme $t-1$. Stoga se prinos hipotetičkog portfelja portfelja u vreme t, pri N kapitalu, definiše kao ponderisana suma povraćaja sastavnih delova portfelja:

$$r_{p,t} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t} r_{i,t} \tag{2}$$

Značajno je naglasiti da mera VaR predstavlja predviđanje gubitka jedan dan unapred. Da bi se proverila valjanost modela VaR, t.j. potencijalni prekršaj[54], VaR se u vreme t procenjuje uzimajući u obzir skup informacija ψ_t i onda se poredi sa odgovarajućom sumom profita/gubitka ostvarenog u $t+1$. Posmatrajmo portfolio čija je cena u vreme $t+1$ određena p_{t+1}. Varijacija koja se opaža na dnevnoj bazi data je kao $\Delta p_{t+1} = p_{t+1} - p_t$. Vidi se da ako je Δp_{t+1} pozitivan, imamo profit, dok negativna vrednost pokazuje da trpimo gubitak. $VaR_{1-\alpha}$ se definiše u novčanim jedinicama, tako da će varijacija Δp_{t+1} samo biti manja nego VaR sa verovatnoćom α gde $(1-\alpha)$ predstavlja stepen poverenja:

$$Pr\left[\Delta p_{t+1} \leq -VaR_{t,1-\alpha}\right] = \alpha \tag{3}$$

Izbor odgovarajuće distribucije portfelja za modeliranje kapitala i prinosa iz portfelja predstavlja ključni korak u proceni VaR. Na prvi pogled, opšti oblik distribucije empirijskih distibucija prinosa, posebno u slučaju dobro diversifikovanih portfelja ukazuje da bi prirodna pretpostavka trebalo da bude Normalna distribucija. Stoga, kada pretpostavimo da prinosi prate tok Normalne distribucije sa srednjom vrednošću μ_t i promenljivošću σ_t Jednačina (3) može se promeniti u:

$$Pr\left[\frac{\Delta p_{t+1} / p_t - \mu_t}{\sigma_t} \leq \frac{-VaR_{t,1-\alpha} / p_t - \mu_t}{\sigma_t}\right] = \alpha \tag{4}$$

[1] **Izbor perioda držanja zavisi od karakteristika portfelja koji banka drži i primene VaR. Na primer, ako se pozicije brzo menjaju, bilo bi dobro da se odabere kratak rok. Ako je svrha da se dobije precizna benčmark mera za rizik da vrednost opadne, horizont bi u idealnom smislu takođe trebalo da bude kraći od srednjeg perioda glavnog rebalansa portfelja.**

[2] **Pri ovakvim aplikacijama mora se predvideti matrica kovarijansi u svim sredstvima u portfelju. Stoga ćemo se u proceni VaR baviti n brojem vremenskih nizova i kreirati odgovarajuću matricu kovarijansi.**

[3] **Proboj se dobija svaki put kad je stvarni gubitak ostvaren na sutrašnji dan u portfelju veći od procene VaR danas.**

Ovo pokazuje da desna strana jednačine (4) predstavlja kvantil standardne Normalne distribucije izražen kao $Z_\alpha = -Z_{1-\alpha}$. stoga, količina novca VaR po metodologiji univarijacione procene izračunava se na sledeći način:

$$VaR_{t,1-\alpha} = -(\mu_t - Z_{1-\alpha} \cdot \sigma_t) \cdot p_t \qquad (5)$$

Ako se VaR definiše kao procenat u odnosu na vrednost portfelja kao $\%VaR_{t,1-\alpha} = VaR_{t,1-\alpha} / p_t$ onda dobijamo:

$$Pr[r_{t+1} \le -\%VaR_{t,\alpha}] = \alpha \qquad (6)$$

U praksi, umesto da radimo sa (5) koja pokazuje takozvanu "apsolutnu" VaR, možemo da pretpostavimo da je $\mu_t=0$ I da koristimo "relativnu" VaR koja se definiše kao:

$$VaR_{t,\alpha} = Z_{1-\alpha} \cdot \sigma_t \cdot p_t \qquad (7)$$

Kod izračunavanja "relativne" VaR nije potrebno da znamo prvi momenat Normalne distribucije μ. Šta više, pošto se radi o kraćim vremenskim periodima, prinosima na dnevnoj bazi, razlika između apsolutne i relativne VaR biće prilično mala.

Kad se radi o multivarijacionom okviru, potrebno je da pređemo sa pozicije pojedinačnog sredstva/ili portfelja na složeni portfelj gde multiplikovane pozicije utiču na procenu VaR. Ovde treba uzeti u obzir ne samo promenljivost pojedinačnih prinosa već i njihove kovarijanse. Stoga procena VaR portfelja od pozicija sredstava koje su izložene nekolicini različitih faktora tržišnog rizika zahteva još jedan input, naime matricu kovarijansi za prinose tržišnih faktora. Tako da jednačina (7) dobija oblik:

$$VaR_{t,\alpha} = Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\mathbf{w}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}\mathbf{w}} \cdot P_t \qquad (8)$$

Gde vektor pondera sredstava iznosi $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n)^T$, P_t predstavlja trenutnu vrednoat portfelja, a $\mathbf{V}$ predstavlja odgovarajuću matricu kovarijansi prinosa sredstava portfelja.

Drugi alternativni način za izračunavanje VaR primenom multivarijacionog okvira jeste primenom vektora pozicionih vrednosti $\mathbf{P} = [P_1, P_2, \ldots, P_n]^T$ sastavnih delova portfelja umesto vektora odgovarajućih pondera sredstava $\mathbf{w}$: tako dobijamo multivarijacioni oblik relativne VaR određene jednačinom:

$$VaR_{t,\alpha} = Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}\mathbf{P}} \cdot \qquad (9)$$

Empirijski izvedeni zaključci pokazuju da pretpostavka o normalnoj distribuciji prinosa obično nije opravdana. Za razliku od predviđenog "normalnog" ponašanja, distribucije prinosa kapitala koje smo pratili često imaju nepravilan tok i visoke kurtoze. Na procenu VaR veoma veliki uticaj ima i to što imaju više pondera na krajevima nego što bi se inače očekivalo kod normalne distribucije. Kada su podaci "veoma opterećeni na krajevima", postoji realna verovatnoća da će negativni prinos biti veći nego što je predviđen po normalnoj distribuciji. Ovo pokazuje da VaR izračunata primenom pretpostavke o normalnoj distribuciji prinosa može značajno da potceni rizik velikog gubitka, posebno u uslovima visokog stepena poverenja. Stoga smo u ovom radu razmatrali i jednu od najuobičajenijih alternativa koje uzimaju u obzir ne-normalni oblik prinosa na sredstva; odnosno, primenili smo i Student's t-distribuciju kao osnovnu pretpostavku ponašanja prinosa na sredstva. Izraz za VaR uz pretpostavku Student's *t*-distribucije može se lako dobiti ako zamenimo α-kvantil Normane distribucije definisane kao $Z_{1-\alpha}$, odgovarajućim α-kvantilom Student's *t*-distribucije označene kao $\chi_{\alpha,v}$,uz „stepena slobode", u odgovarajućim jednačinama VaR o kojima smo prethodno govorili. Student's *t*-distribucija je tesno povezana sa Normalnom distribucijom, ali uopšteno ima deblje krajeve, u zavisnosti od vrednosti parametra „stepena slobode". Usvajanjem "stepena slobode" nivo kurtoze može se modelovati tako da odgovara kurtozi koja je prisutna u posmatranim vremenskim nizovima. Na taj način, univarijaciona jednačina *t*-VaR postaje:

$$VaR_{t,\alpha} = \chi_{1-\alpha,\nu} \cdot \sqrt{(\nu-2)/\nu} \cdot \sigma_{p,t} \cdot P_t \qquad (10)$$

Nakon provere može se zaključiti da formula za *t*-VaR obuhvata i dodatni multiplikator $\sqrt{(\nu-2)/\nu}$ koji ublažava efekat standardne devijacije prethodne jednačine VaR.

Kada je reč o multivarijacionom okviru, moramo da obezbedimo da svaki niz prinosa na sredstva bude oblikovan posebno, u skladu sa pretpostavljanom Student's *t*-distribucijom. Stoga je potrebno da se matrica varijanse i kovarijanse uskladi sa multiplikatorom za svaku vrstu sredstava u portfelju. Broj različitih multiplikatora koji su primenjeni jednak je broju različitih vremenskih nizova za sredstva u portfelju. Ideja je da se utiče na svaku komponentu matrice varijanse i kovarijanse:

$$VaR_{t,\alpha} = \sqrt{\tilde{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}\tilde{\mathbf{P}}} \qquad (11)$$

Ovo usklađivanje vrši se primenom prilagođenog vektora pozicionih vrednosti $\tilde{\mathbf{P}}$ gde dodatni multiplikator obuhvata efekat uzimanja u obzir procenjenih stepenova slobode, posebno za svaki odgovarajući asset u portfelju:

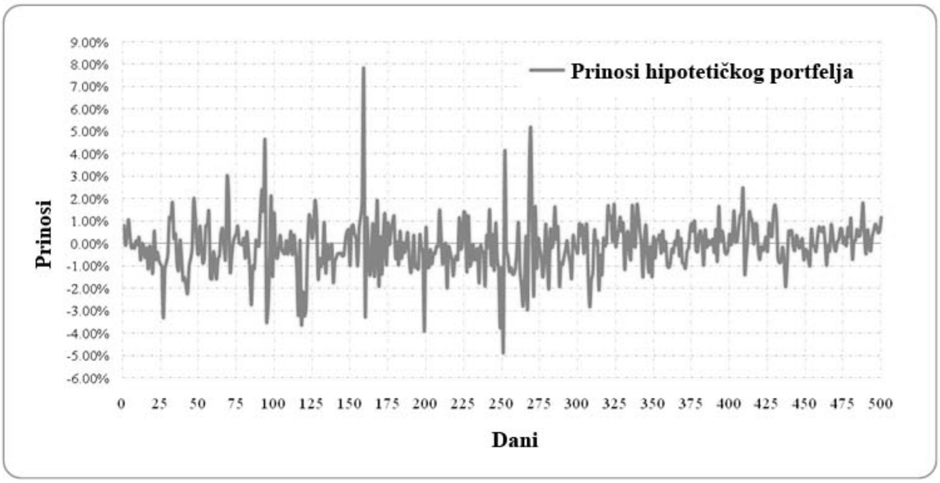
$$\tilde{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}} = \left[\chi'_{1-\alpha,\nu_1} \cdot \sqrt{(\nu_1-2)/\nu_1} \cdot P_1 \quad \cdots \quad \chi'_{1-\alpha,\nu_n} \cdot \sqrt{(\nu_n-2)/\nu_n} \cdot P_n\right] \qquad (12)$$

Kvantili za određene $\chi'_{1-\alpha,\nu_1}, \chi'_{1-\alpha,\nu_2}, \ldots, \chi'_{1-\alpha,\nu_n}$ sada zavise od odabranog stepena poverenja, α, kao i od broja stepenova slobode komponenti portfelja. Pošto se sa povećanjem Student's *t*-distribucija približava Normalnoj distribuciji, Student's *t* VaR sa završnim možemo posmatrati kao generalizaciju normalne VaR. Kako se povećava, se približava svom normalnom ekvivalentu $Z_{1-\alpha,v}$, a vrednost dodatnog multiplikatora približava se vrednosti jedan.

Analitički modeli VaR o kojima smo raspravljali do sada najjednostavniji su u okviru VaR. Ovi modeli uzimaju u obzir promenljivost i korelacije kao konstantne parametre u vremenu i polaze od toga da relevantni prinosi na sredstva iz portfelja tokom vremena imaju stabilnu distribuciju. Ova pretpostavka je sasvim suprotna empirijskim zaključcima koji pokazuju da se i promenljivost i korelacije vremenom menjaju.

3. Izrada multivarijacionog garch modela za vrednost-pod-rizikom

Fenomen o kome se uvek govori kao o "grupisanju promenljivosti" pokazuje da prinosi po sredstvima često imaju periode niske i visoke promenljivosti. Slika1. pokazuje da je pretpostavka da je promenljivost konstantna tokom vremena, što je pretpostavka bezuslovnih (čistih) modela VaR[56], može da zavara.



Slika 1: Periodi visoke i niske volatilnosti

Efekat grupisanja promenljivosti može se eksplicitno kontrolisati pomoću GARCH modela, t.j., uopštenih autoregresivnih modela uslovne heteroskedastičnosti[5]. GARCH modeli su u stanju da obuhvate sve soficistirane efekte kretanja promenljivosti. Pored već pomenutog efekta grupisanja promenljivosti, GARCH ukazuje i na još jednu značajnu karakteristiku koju nazivamo srednja svota. U ovom kontekstu, srednja svota (reverzija) znači da u odsustvu inovacija varijansa teži da na kraju ostane u nekom stepenu ravnoteže.

Univarijacioni GARCH (1,1).pod pretpostavkom da su residuali uslovno normalno raspoređeni, GARCH (p,q) model možemo da predstavimo na sledeći način:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t \tag{13}$$

$$\varepsilon_t \sim N\left(0,\sigma_t^2\right) \tag{14}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{15}$$

gde su $\alpha_1 < 1$, $\beta_1 < 1$ and $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Jednačina (13) pokazuje da se prinos u vremenu t, r_t, sastoji od determinističkog dela μ_t, slučajnog dela ε_t . ε_t predstavlja 'inovaciju' u vremenu t a to predstavlja niz slučajnih šokova sa srednjom vrednošću nula i varijansom prikazanom u jednačini (14). Stoga je uslovna varijansa u vremenu t prikazana jednačinom (15) izražena kao funkcija tri faktora: konstantom ω varijansom procenjenom u prethodnom periodu $\sigma^2_{\tau=1}$ i kvadratom $\varepsilon^2_{\tau=1}$ inovacije u *t-1*. Stoga uslovna varijansa procenjena u nekom datom periodu predstavlja ponderisanu srednju vrednost dugoročne varijanse, očekivane varijanse za prethodni period i šoka za poslednji period. Procena bezuslovne, t.j. "teorijske" dugoročne vrednosti varijanse podrazumeva se po samom modelu. Ako takva vrednost postoji, predstavljaće bezuslovnu (čistu) očekivanu vrednost tako da $\sigma^2 = E\left[\varepsilon_{t-1}^2\right] = E\left[\sigma_t^2\right] = E\left[\sigma_{t-1}^2\right]$ i onda se dobija:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 + \beta_1} \tag{16}$$

Većina aplikacija GARCH modela zasnovana je na GARCH (1, 1) koji je najšire korišćeni GARCH model u praksi. Glavni razlog je taj da GARCH (1, 1) najčešće odgovara podacima u prihvatljivoj meri.

---

[4] Ključna razlika između bezuslovnih i uslovnih modela odnosi se na činjenicu da bezuslovni modeli kao procenu daju konstantu, dok su za uslovne potrebni model specifikacije i tehnikau regresije u zavisnosti od vremena za koje se procena radi.

[5] Heteroskedastičnost znači varijansu koja se menja u vremenu i suprotna je pojmu konstantne varijanse. Uslovni znači da se predviđanja vrše na osnovu informacija iz prethodnog perioda; tako, na primer, trenutni nivo promenljivosti pokazuje trenutni nivo neizvesnosti nastao pod uticajem prethodnih šokova. Autoregresivni se odnosi na model koji se koristi u kreiranju uslovne heteroskedastičnosti koja se zansniva na autoregresiji varijanse. Konačno, uopšteni se odnosi na poseban tip modela koji je uveden kao generalizacija (uopštavanje) (ARCH) modela prve autoregresivne uslovne varijanse. Stoga modeli autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti omogućavaju da se buduća promenljivost predviđa primenom regresije zasnovane na procenama ranijih vrednosti promenljivosti.

Multivarijacioni GARCH (mGARCH) modeli su po duhu veoma slični svojim univarijacionim rođacima. Glavna razlika je u stvari u tome da mGARCH modeli specifikuju jednačine po tome kako se kovarijanse kreću u vremenu. Literatura predlaže niz različitih formulacija mGARCH, među kojima i VECH, dijagonalni VECH, DVEK, CCC-GARCH[6] i ortogonalni GARCH model. Pošto je složenost većine modela naglašena, potrebno je da se ozbiljno njima pozabavimo u smislu teorijskih predloga i praktične primene na primerima.

VECH multivarijacioni GARCH (1,1). VECH model prema [8] uobičajeno se predstavlja kao:

$$\mathbf{r_t} = \boldsymbol{\mu}_\mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t} \tag{17}$$

$$\mathbf{V_t} = \mathbf{W} + \mathbf{A}\,\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t-1}^\mathbf{T} + \mathbf{B}\mathbf{V_{t-1}} \tag{18}$$

gde $\mu_t = [\mu_1,...,\mu_n]^T$ predstavlja vektor srednjih prinosa, a $\varepsilon_t = [\varepsilon_1,...,\varepsilon_n]^T$ predstavlja vektor slučajnih šokova čija je uslovna varijansa predstavljena *n*-by-*n* matricom $\mathbf{V_t}$. U specifikaciji multivarijacionog GARCH modela, parametri modela **A** i **B** su pozitivno definisani, *n*-by-*n* matrice i **W** je *n*-by-1 matrica. Umeće kreiranja multivarijacionih GARCH modela sastoji se u tome da specifikujemo zavisnost $\mathbf{V_t}$ od prošlih događaja i to tako da $\mathbf{V_t}$ uvek ostane simetrična i pozitivno definisana. Jednačina (18) može se napisati u VECH operator formi kao:

$$VECH(\mathbf{V_t}) = \mathbf{W} + \mathbf{A}\,VECH\left(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t-1}^\mathbf{T}\right) + \mathbf{B}\,VECH(\mathbf{V_{t-1}}) \tag{19}$$

gde VECH operator uzima portfolio iz 'gornje trougaone' matrice i svaki element stavlja u vektor sa samo jednom kolonom [14]. Na primer, u portfelju sa samo dva sredstva VECH ($\mathbf{V_t}$) = [$\sigma_{1,1}$, $\sigma_{1,2}$, $\sigma_{1,3}$]^T gde $\sigma_{i,\,i,t}$ predstavlja uslovne varijanse svakog sredstva u portfelju u vremenu *t*. Termini $\sigma_{i,\,j,t}$ for $i \neq j$ određuju uslovne, vremenski zavisne kovarijanse između prinosa na sredstva. Jednačina (19) u matričnoj formi za ove dve varijable glasiće:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 \\ \sigma_{21,t} \\ \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t+1}^2 \\ \varepsilon_{1,t=1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t-1}^2 \\ \sigma_{21,t-1} \\ \sigma_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

I shodno tome,

$$\sigma_{1,t}^2 = \omega_1 + \alpha_{11}\varepsilon_{1,t-1}^2 + \alpha_{12}\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + \alpha_{13}\varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta_{11}\sigma_{1,t-1}^2 + \beta_{12}\sigma_{21,t-1} + \beta_{13}\sigma_{2,t-1}^2 \tag{21}$$

$$\sigma_{21,t} = \omega_2 + \alpha_{21}\varepsilon_{1,t-1}^2 + \alpha_{22}\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + \alpha_{23}\varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta_{21}\sigma_{1,t-1}^2 + \beta_{22}\sigma_{21,t-1} + \beta_{23}\sigma_{2,t-1}^2 \tag{22}$$

$$\sigma_{2,t}^2 = \omega_3 + \alpha_{31}\varepsilon_{1,t-1}^2 + \alpha_{32}\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + \alpha_{33}\varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta_{31}\sigma_{1,t-1}^2 + \beta_{32}\sigma_{21,t-1} + \beta_{33}\sigma_{2,t-1}^2 \tag{23}$$

Može se zaključiti da uslovne varijanse i uslovne kovarijanse zavise od zaostalih vrednosti svih uslovnih varijansi, i uslovnih kovarijansi između njih, kao i od zaostalih kvadrata vrednosti šokova i unakrsnih proizvoda greške [19].

Glavni problem sa većinom multivarijacionih GARCH specifikacija jeste taj da broj parametara ima tendenciju da prosto eksplodira u skladu sa dimenzijama modela, čime postaju neprikladni za analizu mnogih faktora rizika. Broj parametara u VECH modelu je (N× (N + 1) + N^2 × (N + 1)^2) / 2. U ovom napred navedenom slučaju od dve varijable broj parametara ovog modela iznosi 21. Šta više, nema garancije da će specifikacija $\mathbf{V_t}$ biti pozitivna polu-definisana. Stoga je u praksi obično neophodno ograničiti model tako da ima odgovarajuću dimenzionalnost i da obezbedi pozitivnu definisanost. Pokušaj da se proceni ovakav model svakako će biti težak, ne samo zato što treba vremena da se izračunaju parametri, već i zato što postoji veliki broj lokalnih optimuma u funkciji verovatnoće zbog čega mora da se primeni veliki broj različitih početnih vrednosti. Tako se u praktične svrhe uglavnom koristi pojednostavljena verzija ovog modela. [11]

Dijagonalni VECH multivarijacioni GARCH (1,1). U daljem razvoju VECH modela, prema [8], predlaže se primena dijagonalnog VECH (DVECH). Najuobičajenija simplifikacija jeste da se ograniči fokus na slučajeve kada su matrice **A** i **B** jednačine (19) dijagonalne matrice. Ovaj poseban slučaj predstavlja se u obliku:

$$VECH(\mathbf{V_t}) = \overline{\mathbf{W}} + \overline{\mathbf{A}}\,VECH\left(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t-1}^\mathbf{T}\right) + \overline{\mathbf{B}}\,VECH(\mathbf{V_{t-1}}) \tag{24}$$

gde i i i moraju da budu simetrične matrice i to tako da ima pozitivne dijagonalne elemente a da sve ostale matrice imaju ne-negativne dijagonalne elemente. Ovim se smanjuje broj parametara za procenu za 3N × (N+1) / 2, ili 9 parametara za dve grupe sredstava i dobijamo:

[6] **Model konstantne uslovne korelacije**

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 \\ \sigma_{21,t} \\ \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t+1}^2 \\ \varepsilon_{1,t=1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t-1}^2 \\ \sigma_{21,t-1} \\ \sigma_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Isto tako,

$$\sigma_{1,t}^2 = \omega_1 + \alpha_{11}\varepsilon_{1,t-1}^2 + \beta_{11}\sigma_{1,t-1}^2 \tag{26}$$

$$\sigma_{21,t} = \omega_2 + \alpha_{22}\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + \beta_{22}\sigma_{21,t-1} \tag{27}$$

$$\sigma_{2,t}^2 = \omega_3 + \alpha_{33}\varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta_{33}\sigma_{2,t-1}^2 \tag{28}$$

Na ovaj način model podrazumeva da vraćamo model uGARCH (1,1) za sve vrste volatilnosti, ali u osnovi multivarijacione distribucije postoji i kovarijansa koja se mora procenjivati po metodu maksimalne verodostojnosti. Ovo posebno može da predstavlja dugotrajan proces, kada su velike matrice kovarijanse opterećene velikim brojem pozicija i portfelju. Šta više, u nekim slučajevima, matrica kovarijanse u modelu DVECH ne mora da bude pozitivna definisana. [19]

Multivarijacioni GARCH (1,1) konstantnih uslovnih korelacija. Problemi konvergencije i procene vremenski promenljivih kovarijanti u multivarijacionim GARCH modelima doveli su do nastanka tzv. multivarijacionog GARCH (1,1) konstantnih uslovnih korelacija ili CCC-mGARCH(1,1) modela za praktične namene. Prema [8], postoji mogućnost da se zadrže vremenski promenljive karakteristike primenom uslovnih varijansi i održavanjem korelacija u konstantnoj vrednosti sve vreme. Stoga matrica uslovne kovarijanse ima sledeći oblik:

$$\mathbf{V_t} = \mathbf{D_t R D}_t \tag{29}$$

$$\mathbf{D_t} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{1,t}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\sigma_{k,t}^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \rho_{k-1,1} & \rho_{k-1,2} & 1 & \rho_{k-1,k} \\ \rho_{k,1} & \rho_{k,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

gde je **R** konstantna, pozitivno definisana matrica korelacije, a Dt predstavlja matricu dijagonalne volatilnosti sa elementima koji zadovoljavaju univarijacioni GARCH (1,1) dobijen Jednačinom (15). Ova specifikacija konstantne uslovne korelacije predstavlja jednostavan način kombinovanja univarijacionih GARCH procesa i multivarijacione logike. Na ovaj način volatilnost svakog sredstva ponaša se po univarijacionom GARCH (1,1). Kao rezultat, ovaj model ima K(K+5)/2 parametara, šta više, ova specifikacija garantuje pozitivnu definisanost i identifikaciju $\mathbf{V_t}$.[11]

Model CCC-mGARCH(1,1) često predstavlja korisnu polaznu tačku prema složenijim modelima. U nekim empirijskim postavkama on omogućava odgovarajuće performanse, ali se obično veruje da je konstantnost uslovne korelacije u ovom modelu nerealna osobina i da uticaj novih dešavanja na finansijskim tržištima traži modele koji omogućavaju dinamičku evoluciju uslovne korelacije kao i dinamičan razvoj svih volatilnosti.

Ortogonalni GARCH (1,1). Takozvani "Ortogonalni GARCH" (OGARCH) predstavlja rešenje za problem ogromnog broja parametara matrice kovarijansi i za teškoće u proceni maksimalne multivarijacione verodostojnosti. Matrica kovarijanse može da bude velika za svaku aplikaciju i stoga je teško raditi na njoj. *Analiza principalnih komponenti* (PCA) predstavlja metod izdvajanja najznačajnijih nezavisnih izvora informacija u okviru podataka. Ovaj pristup je efikasan u izračunavanju zato što omogućava da se dimenzije problema u velikoj meri smanje, a da se pri tome zadrži visok stepen preciznosti. Moguće je takođe u velikoj meri smanjiti broj parametara koje treba proceniti primenom multivarijacione GARCH logike. Prema ovoj ideji možemo da nađemo i koristimo linearne kombinacije principalnih komponenti koje po definiciji nisu u korelaciji, i samo na osnovu njih možemo da smanjimo dimenzionisanost problema u procesu procenjivanja parametara.

Sa **r** ćemo označiti *T* opservacije matrice koja sadrži *n* sredstava. Primenom PCA dobićemo *k* fiksne varijable, principalne komponente, koje nisu u korelaciji i gde je svaka komponenta u stvari jednostavna linearna kombinacija prvobitnih prinosa. Istovremeno se jasno utvrđuje koliko ukupne varijacije u prvobitnom sistemu faktora rizika svaka principalna komponenta objašnjava. Svaka principalna komponenta svrstana je po količini varijacije koju objašnjava [1]. Rezultati PCA osetljivi su na preraspoređivanje podataka tako da je postala standardna praksa da se podaci normalizuju pre analize; na primer, kod Normalne distribucije oduzmemo srednju vrednost uzorka i podelimo ga sa uzorkom standardne devijacije. Ako definišemo dijagonalnu matricu $\mathbf{V}=\{\sigma_1^2,\ldots,\sigma_n^2\}$ kao matricu empirijskih varijansi vektora $\mathbf{r_t}$ standardizovani prinosi $\mathbf{z_t}$ mogu se izraziti kao:

$$\mathbf{z_t} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{r_t}, \quad \mathbf{E}[\mathbf{z_t}] = 0, \quad \mathbf{E}[\mathbf{z_t z_t^T}] = \mathbf{V} \tag{31}$$

i onda **V** predstavlja matricu bezuslovne kovarijanse $\mathbf{z}_t$ matrice. Ova matrica se može razložiti kao:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P\Lambda P}^{\mathrm{T}} \tag{32}$$

gde **P** predstavlja matricu ortonormalnih sopstvenih vektora u kojima svaka kolona odgovara sopstvenih vrednosti λ_i gde je $i = 1,..,n$. Matrica **Λ** predstavlja dijagonalnu matricu sopstvenih vrednosti **V** tako da se **Λ** = *diag*š { $\lambda,\ldots, \lambda_n$ } rangira u okviru silaznog niza $\lambda_1 > \lambda_2 \ldots > \lambda_n$. Stoga se **V** može napisati na sledeći način:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{LL}^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

gde $\mathbf{L} = \mathbf{P\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ označava *Cholesky* razloženu komponentu matrice **V.** Matrica **L** zadovoljava:

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L} = \mathbf{I}_{\mathrm{N}} = \mathbf{LL}^{\mathrm{T}} \tag{34}$$

Prema [9], sa $\mathbf{y_t}$ određujemo vektor principalnih komponenti $\mathbf{z_t}$, koji se definiše kao:

$$\mathbf{y}_{\mathrm{t}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{z}_{\mathrm{t}} \tag{35}$$

Ovaj izraz može se tumačiti kao kao prinos od portfelja koji dodeljuje ponder y_{ij} za j-te hartije od vrednosti. Pošto je za principalne komponente karakteristično da nisu u korelaciji, to podrazumeva da tokom modelovanja matrice kovarijanse možemo da ignorišemo uslove kovarijanse i da stoga modelujemo varijansu pomoću svake principalne komponente posebno. Proizilazi da se primenom GARCH (1,1) modela problem smanjuje na niz univarijacionih procena. Drugo značajno svojstvo ove analize jeste da varijansa svake principalne komponente predstavlja odgovarajuću sopstvenu vrednost. Obratite pažnju da:

$$E(\mathbf{y}_{\mathrm{t}}) = \mathbf{L}^{-1}E(\mathbf{z}_{\mathrm{t}}) = 0 \tag{36}$$

Matrica bezuslovne kovarijanse Jednačine (35) dobija oblik:

$$E(\mathbf{y}_{\mathrm{t}}\mathbf{y}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{L}^{-1}E(\mathbf{z}_{\mathrm{t}}\mathbf{z}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}})\mathbf{L}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{L}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{I}_{\mathrm{n}} \tag{37}$$

pošto Jednačina (33) sadrži $\mathbf{y_t}$ unakrsno je nekorelisana i svaka komponenta ima jediničnu varijansu. Pošto je svako $\mathbf{z_t} = \mathbf{L}\,\mathbf{y_t}$ koordinata $\mathbf{z_t}$ može se izraziti kao linearna kombinacija principalnih komponenti:

$$z_{t,i} = \sum_{j=1}^{n} l_{i,j} y_{t,j} \tag{38}$$

gde i=1,…n, a $l_{i,j}$ i elementi **L**.

S druge strane, uslovno prema informaciji dostupnoj u vremenu *t-1*, vektor standardizovanih reziduala $\mathbf{z_t}$ ima srednju vrednost nula i matricu kovarijanse $\mathbf{V_t}$. To znači:

$$E[\mathbf{z}_{\mathrm{t}} \mid \Psi_{t-1}] = E[\mathbf{z}_{\mathrm{t}}] = 0\,, \quad E[\mathbf{z}_{\mathrm{t}}\mathbf{z}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} \mid \Psi_{t-1}] = \mathbf{V}_{\mathrm{t}} \tag{39}$$

gde, za svako t, matrica $\mathbf{V_t}$ predstavlja pozitivnu definisanu i merljiva je s obzirom na skup informacija ψ_{t-1} tako da dobijamo:

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathrm{t}} = E[\mathbf{y}_{\mathrm{t}}\mathbf{y}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}}] = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{V}_{\mathrm{t}}\mathbf{L}^{-1\mathrm{T}} \tag{40}$$

Pod pretpostavkom da se uslovna kovarijansa $\mathbf{V_t}$ ponaša po Jednačini (18) multivarijacionog VECH procesa, možemo da iskoristimo ortonormalnu osnovu principalnih komponenti primenom Jednačine linearne trensformacije (35) na uslovne reziduale $\mathbf{z_t}$. U ortonormalnoj osnovi principalnih komponenti Jednačina (18) onda glasi:

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathrm{t}} = \widetilde{\mathbf{W}} + \widetilde{\mathbf{A}}\,\widetilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{t-1}}\widetilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{t-1}}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathrm{t-1}} \tag{41}$$

gde je $\widetilde{\mathbf{y}}_{t-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}_{t}$ a $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{L}^{-1\mathrm{T}}$ za $\mathbf{M} \in \{\mathbf{V},\mathbf{A},\mathbf{B}\}$. Ovom jednačinom možemo da procenjujemo posebno svaku principalnu komponentu matrice uslovnih kovarijansi principalnih komponenti u odnosu na skup informacija ψ_{t-1}. Pošto su principalne komponente ortogonalne, normalno je pretpostaviti da je matrica $\widetilde{\mathbf{V}}$ dijagonalna. U ovom slučaju, proces opisan Jednačinom (18) može se procenjivati za svaku principalnu komponentu posebno, čime dobijamo skup n nezavisnih skalarnih jednačina oblika GARCH (1,1).

Kad izvršimo procenu skupa parametara iz Jednačine (41), možemo da primenimo obrnutu transformaciju:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{t}} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathrm{t}}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \tag{42}$$

i da dobijemo niz matrica uslovne kovarijanse u originalnoj bazi standardizovanih prinosa. Ovo nam omogućava da na najefikasniji način vršimu procenu VaR u multivarijacionom okviru pri čemu ne gubimo ni jednu informaciju. [22]

Procena elemenata $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{t}}$ računski je mnogo jednostavnija i brža nego prvobitna uslovna matrica varijanse i kovarijanse $\mathbf{V_t}$. Dimenzionalnost problema je na taj način smanjena na procenu samo parametara n.

Usklađivanje multivarijacionih GARCH modela. U praksi, pristup usklađivanju GARCH modela sa podacima koji je u najširoj primeni jeste metod procene maksimalne verovatnoće (MLE)[7]. U ovom radu razmatramo primenu MLE metoda sa Normalnom i Student *t* distribucijom kao osnovnim pretpostavkama. Pošto usklađivanje parametara modela multivarijacionih distribucija većih dimenzija primenom MLE možda neće biti izvodljivo i ne preporučuje se, kombinujemo procenu multivarijacionih GARCH modela koji se mogu tretirati kao skup njihovih univarijacionih GARCH dvojnika. U nekom idealnom modelu faktora dobili bismo dijagonalnu matricu kovarijanse. To znači da usklađujemo i model CCC-mGARCH gde matrica konstantne uslovne korelacije (CCC) predstavlja identifikacionu matricu i model O-mGARCH sa njegovom dijagonalno postavljenom formom principalnih komponenti. Funkcija log-verovatnoće koja je u osnovi standardne Student's-*t* distribucije redukuje se u:

$$L_s = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[ln\sigma_t^2 + (\nu+1)ln\left(1+\frac{r_t^2}{(\nu-1)\sigma_t^2}\right)\right] \tag{43}$$

[7] **Maksimizacija je izvršena primenom modifikovanog Newton-Raphson postupka**

a u Normalnoj distribuciji u:

$$L_n = -\frac{1}{2} T \cdot ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \left[ln \sigma_t^2 + \frac{r_t^2}{\sigma_t^2} \right] \tag{44}$$

4. Empirijska studija i rezultati

U ovoj empirijskoj studiji primenjujemo tehnike VaR opisane u prethodnim poglavljima na praktične podatke iz realnog života. Procena VaR za svaku metodologiju zasniva se na istom osnovnom hipotetičkom portfelju. Hipotetički portfelj koji smo napravili sadrži akcije, blagajničke zapise i devizne kurseve sa srpskog tržišta kapitala koje bi hipotetički mogla da drži bilo koja banka u Srbiji. Grafičke prezentacije rezultata procene VaR predstavljene su i poređene sa dnevnim profitom/gubitkom nastalim držanjem ovog hipotetičkog portfelja. Bazel II postupak povratnog testiranja[8] kao i Kupiec test, primenjeni su da bi se videlo koji model je najprikladniji za primenu u proceni VaR na dnevnoj bazi i da bi se stoga odredili zahtevi kapitala za tržišni rizik.

Potrebni podaci za input u ovoj empirijskoj studiji obuhvataju neophodne informacije o finansijskim instrumentima portfelja koji posmatramo. Podaci o sastavnim delovima portfelja kao što su istorijat cena, vrednosti pozicija, denominacija valute za svaku poziciju iz portfelja, bili su neophodni da bi se dobili prinosi za ceo portfelj i za njegove sastavne delove. Svi ovi podaci predstavljaju glavni input za analizu VaR. Za procenu modela, isti takav hipotetički portfelj kakav je sačinjen i korišćen u analizi procene VaR obuhvata:

- ✓ 5 akcija, denominovanih u RSD, kojima se neprekidno trguje na Beogradskoj berzi, naime: AGBN, AIKB, ENHL, PRBN and TIGR.
- ✓ 3 pozicije strane valute: EUR, USD i CHF. Devizni kurs za ove valute urađen je prema RSD.
- ✓ 2 blagajnička zapisa nulti-kupon kojima se neprekidno trguje na Beogradskoj berzi: A2010, A2011. Svaka ova obveznica denominovana je u EUR. Prva dospeva 31. maja 2010., a druga dospeva 31. maja 2011.

Vremenski nizovi cena za ovih 10 pozicija iz portfelja dobijeni su iz BELEX podataka (www.belex.rs). Ovi vremenski nizovi su za period od 20. septembra 2007 do 11. septembra 2009. Ovaj raspon podataka uzet je u cilju procene, da se istakne opasan period u privredi nastao uticajem globalne finansijske krize kao i da bi se procenila VaR u ovom teškom periodu za srpsku privredu. Ukupno imamo 501 opservaciju cena za svaku poziciju iz portfelja, a poređane su uzlaznim redom u odnosu na datum. Za procene multivarijacione VaR svaki od 10 vremenskih nizova cena iskorišćen je i transformisan u 500 odgovarajućih opservacija prinosa, a prema Jednačini (1). Vrednosti pozicija na dnevnoj bazi izračunavaju se pod pretpostavkom da postoji približno isto ponderisan portfelj. To znači da svaka od deset pozicija u portfelju približno pokriva 10% ukupne sume u portfelju na dnevnoj bazi. Šta više, pošto se portfelj sastoji od komponenata denominovanih u različitim valutama, aritmetički prinos se izračunava pošto se vremenski nizovi cena svake komponente portfelja transformišu u dinarsku vrednost. Drugim rečima, vremenski nizovi cena na dnevnoj bazi prvo se izračunavaju u dinarima, a onda se obračunavaju odgovarajući prinosi.

Count	*Date*	*AGBN*	*AIKB*	*CHF*	*EUR*	*USD*	*ENHL*	*PRBN*	*TIGR*	*A2010*	*A2011*	*PORTFOLIO*
1	21/09/2007	0.313%	4.356%	0.013%	-0.223%	-1.016%	1.984%	1.079%	-1.598%	-0.488%	-0.223%	0.811%
2	24/09/2007	1.697%	0.399%	-0.721%	-0.588%	-0.687%	-2.645%	-0.194%	1.578%	-0.565%	-0.637%	-0.074%
3	25/09/2007	4.170%	-0.468%	-0.771%	-0.753%	-0.563%	1.499%	0.331%	-2.056%	-0.501%	-0.487%	0.342%
4	26/09/2007	0.292%	0.106%	-0.116%	-0.249%	-0.721%	1.077%	3.374%	2.099%	-0.249%	-0.249%	1.069%
5	27/09/2007	0.444%	0.053%	0.058%	0.325%	0.332%	-0.152%	1.332%	0.046%	-0.219%	0.044%	0.378%
6	28/09/2007	-1.915%	0.062%	0.168%	0.532%	0.390%	-0.915%	0.703%	-0.913%	0.812%	0.532%	-0.194%
7	01/10/2007	0.454%	0.000%	-0.119%	0.043%	-0.651%	-0.062%	-0.717%	0.691%	-0.188%	0.043%	-0.072%
8	02/10/2007	-0.458%	-0.991%	-0.267%	-0.237%	0.057%	-1.016%	0.352%	0.686%	-0.237%	-0.237%	-0.213%
9	03/10/2007	-0.078%	1.028%	-0.222%	-0.102%	0.243%	-0.093%	-0.369%	0.455%	0.813%	-0.102%	0.125%
10	04/10/2007	-0.203%	0.557%	-0.404%	-0.500%	0.043%	0.498%	-0.926%	1.357%	-0.832%	-0.573%	-0.055%
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
491	31/08/2009	-0.255%	5.646%	0.068%	-0.228%	0.296%	1.139%	0.000%	1.883%	-0.123%	0.433%	0.614%
492	01/09/2009	-3.809%	0.445%	-0.328%	-0.150%	-0.616%	3.041%	-1.460%	2.826%	0.340%	-0.238%	0.001%
493	02/09/2009	-2.135%	-1.693%	0.279%	0.186%	1.159%	-1.639%	-3.111%	0.529%	-0.637%	0.219%	-0.337%
494	03/09/2009	0.339%	0.082%	0.501%	0.309%	-0.113%	-1.222%	2.294%	0.000%	0.645%	0.309%	0.289%
495	04/09/2009	0.383%	2.786%	0.016%	0.062%	0.209%	2.475%	0.149%	1.472%	0.114%	0.029%	0.562%
496	07/09/2009	7.484%	4.544%	-0.275%	-0.097%	-0.648%	0.439%	0.000%	1.658%	-0.003%	-0.097%	0.864%
497	08/09/2009	1.629%	3.889%	-0.255%	-0.117%	-0.159%	2.732%	4.627%	0.815%	0.029%	-0.424%	0.757%
498	09/09/2009	-1.726%	-0.550%	0.254%	0.056%	-0.987%	0.957%	9.130%	1.112%	-0.048%	0.331%	0.471%
499	10/09/2009	1.160%	6.531%	0.106%	0.060%	-0.531%	0.738%	4.444%	-2.100%	0.133%	0.027%	0.585%
500	11/09/2009	1.447%	6.339%	0.230%	0.138%	-0.143%	3.766%	3.129%	0.919%	0.325%	0.138%	1.169%

Tabela 1: *Periodi niske i visoke volatilnosti*

[8] Povratno testiranje predstavlja postupak poređenja dnevnih profita i gubitaka, rezultata trgovine, primenom procene VaR kreirane pomoću modela da bi se iskalibrirala njena preciznost. Rezultati, ili drugim rečima autputi, povratnog testiranja vide se kao jedan broj izuzetaka, t.j., prekida VaR. Do izuzetka dolazi svaki put kad suma gubitka u trgovinskom portfelju banke prevaziđe procenjenu VaR za taj dan. Postupak povratnog testiranja obuhvata sistematsko poređenje istorije predviđanja VaR sa profitima i gubicima u portfelju koji su za njih vezani.

Čitav opseg podataka predstavljan na tabeli 1 podeljen je na dva dela:

I. Inicijalni period procene

II. Period procene VaR.

Inicijalni period procene obuhvata prvih 250 prinosa, od 1. do 250., t.j. od *20. septembra 2007.* do *16. septembra 2008.* Stoga su prvi rezultati VaR, na osnovu različitih multivarijacionih metoda GARCH, izračunati u odnosu na podatke iz inicijalnog perioda procene, pošto se ovi prinosi koriste kao inicijalni input za prvu procenu VaR. Šta više, jednaki ponderi konstituenata portfelja dodeljeni su u odnosu na cene pozicija poslednjeg dana inicijalnog perioda procene, *16. septembra 2008.* Prinosi portfelja i zbirna statistika date su u tabeli 2. Tabela koja sledi predstavlja zbirnu statistiku kao i Jarque-Bera statistiku za testiranje normalnosti. Za sva sredstva u portfelju uključujući i sam portfelj odbijena je nulta hipoteza na svakom nivou značajnosti, pošto je dokazano postojanje značajne kurtoze i negativne iskošenosti. Iz tabele 2 dobijamo relativno niske vrednosti stepenova slobode (DoF) za sve komponente portfelja uključujući i sam portfelj, što potvrđuje prisustvo relativno visoke kurtoze u podacima.

	AGBN	*AIKB*	*CHF*	*EUR*	*USD*	*ENHL*	*PRBN*	*TIGR*	*A2010*	*A2011*	*PORTFOLIO*
Pozicija*	100	300	26,300	16,600	23,600	900	1,000	1,300	18,600	19,700	12,945,751
Srednja vrednost	-0.0034	-0.0030	0.0000	-0.0002	-0.0002	-0.0030	-0.0049	-0.0026	0.0000	-0.0001	**-0.0024**
Medijan	-0.0023	-0.0019	-0.0009	-0.0003	-0.0004	-0.0028	-0.0020	0.0000	-0.0005	-0.0006	-0.0025
Standardna devijacija	0.0262	0.0230	0.0075	0.0065	0.0086	0.0295	0.0338	0.0327	0.0070	0.0072	**0.0126**
Kurtoza	7.0192	11.3229	5.3011	7.9607	4.6473	4.6927	8.0507	4.9855	6.2435	6.8521	9.8930
Iskošenost	0.4425	0.2308	0.3045	0.2447	-0.0529	0.3920	1.0467	0.1347	0.2762	0.4914	0.8791
Minimum	-8.69%	-12.91%	-2.84%	-2.83%	-3.11%	-9.24%	-11.18%	-9.71%	-2.83%	-2.83%	-3.91%
Maksimum	12.70%	12.79%	2.94%	2.96%	2.53%	10.02%	18.18%	10.00%	2.96%	2.96%	7.76%
Jarque-Bera statist..	176.43	723.7	59.02	258.8	28.38	36.25	311.36	41.82	112.76	164.63	527.13
p-vrednosi	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
Student'sł DoF	2.356	2.074	4.142	5.210	3.835	3.137	2.248	7.022	2.588	2.729	**3.454**
Count	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250

*Akcije: pokazuje broj akcija koje se drže. Blagajnički zapisi: pokazuje nominalnu vrednost u stranoj valuti. Strani kurs: pokazuje poziciju u stranoj valuti. Portfelj: pozicija je izražena u RSD. Datum procene 11. septembar 2009.

Tabela 2: *Zbirna statistika u inicijalnom periodu procene*

Period procene VaR obuhvata drugih 250 prinosa sa tabele 3, od 251. do 500. prinosa, t.j., od *17. septembra 2008.* pa sve do *11. septembra 2009.* Stoga ovo predstavlja period posmatranja u kome se procene VaR izračunavaju iterativno na dnevnoj bazi. U ovom periodu procena VaR se vrši primenom koncepta "rolling window". To znači da se prvi rezultati VaR izračunavaju na podacima iz inicijalnog perioda procene od 1. do 250. procene; onda se 1. procena (iz inicijalnog perioda procene) izbacuje, a u "rolling window" se uključuje 252. procena. Stoga u drugoj proceni VaR imamo opseg koji obuhvata prinose od 2. do 252., a VaR se ponovo obračunava za svaku posmatranu metodologiju i to po ovom novom opsegu. Ovaj postupak se ponavlja sve vreme dok ne procenimo VaR za poslednji "rolling window", od 251.[1] do 500. posmatranja prinosa. Ovaj koncept nam omogućava da poslujemo sa 250 opservacija prinosa u svakom periodu za koji se VaR obračunava. U ovom radu dajemo 250 procena VaR za 250 ovih situacija u opsegu koji obeležava period procene VaR.

Na tabeli 3. prikazana je zbirna statistika za period procene VaR obračunata poslednjeg dana perioda posmatranja. Tabela 3 pokazuje da je prosečni dnevni priliv oko nula procenata ili zanemarljivo mali u poređenju sa standardnom devijacijom uzorka. Zato se prilikom modelovanja sredstava i prinosa portfelja na dnevnoj osnovi za srednju vrednost često uzima nula procenata. Jarque-Bera statistika za testiranje normalnosti pokazuje da su u ovom periodu prinosi samo jedne komponente, ENHL, imali Normalnu distribuciju.

Za sva druga sredstva u portfelju uključujući i sam portfelj, nulta hipoteza normalnosti ne važi ni za jedan nivo značaja. Šta više, opet smo svedoci visoke kurtoze i negativne iskošenosti. Opet, zapažene su relativno niske vrednosti DoF što potvrđuje da u podacima postoji relativno visoka kurtoza. Šta više, statistika maksimuma i minimuma ima veoma visoku apsolutnu vrednost što ukazuje na prisustvo ekstremnih rezultata.

	AGBN	*AIKB*	*CHF*	*EUR*	*USD*	*ENHL*	*PRBN*	*TIGR*	*A2010*	*A2011*	*PORTFOLIO*
Pozicija*	100	300	26,300	16,600	23,600	900	1,000	1,300	18,600	19,700	12,935,346
Srednja vrednost	0.0000	-0.0006	0.0011	0.0008	0.0008	-0.0005	-0.0008	0.0004	0.0012	0.0012	**0.0001**
Medijan	0.0000	-0.0005	0.0007	0.0004	-0.0001	-0.0021	0.0000	0.0000	0.0011	0.0008	0.0007
Standardna devijacija	0.0444	0.0478	0.0095	0.0067	0.0127	0.0404	0.0458	0.0299	0.0082	0.0076	**0.0103**
Kurtoza	5.4526	4.9877	8.5446	8.0631	4.2339	3.1247	4.6752	4.2895	10.2635	6.9532	7.5034
Iskošenost	0.1811	0.0782	-0.6077	-0.5650	0.2012	-0.0071	0.2818	0.2881	-0.2036	-0.3024	0.0866
Minimum	-16.43%	-18.91%	-5.32%	-3.60%	-3.94%	-10.02%	-13.28%	-9.00%	-4.22%	-3.83%	-4.78%
Maksimum	18.75%	19.33%	3.49%	2.34%	4.80%	10.06%	17.14%	10.13%	4.59%	2.54%	5.18%
Jarque-Bera statist..	64.02	41.41	335.6	280.32	17.54	**0.16141**	32.5408	20.778	551.3	166.6	211.56
p-vrednost	0.001	0.001	0.001	0.001	0.0033	**0.500**	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001
Student's *t* DoF	2.7164	4.2697	2.3693	2.1119	5.6813	22.4680	3.1941	2.6883	2.4930	2.9426	**3.9368**
Count	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250

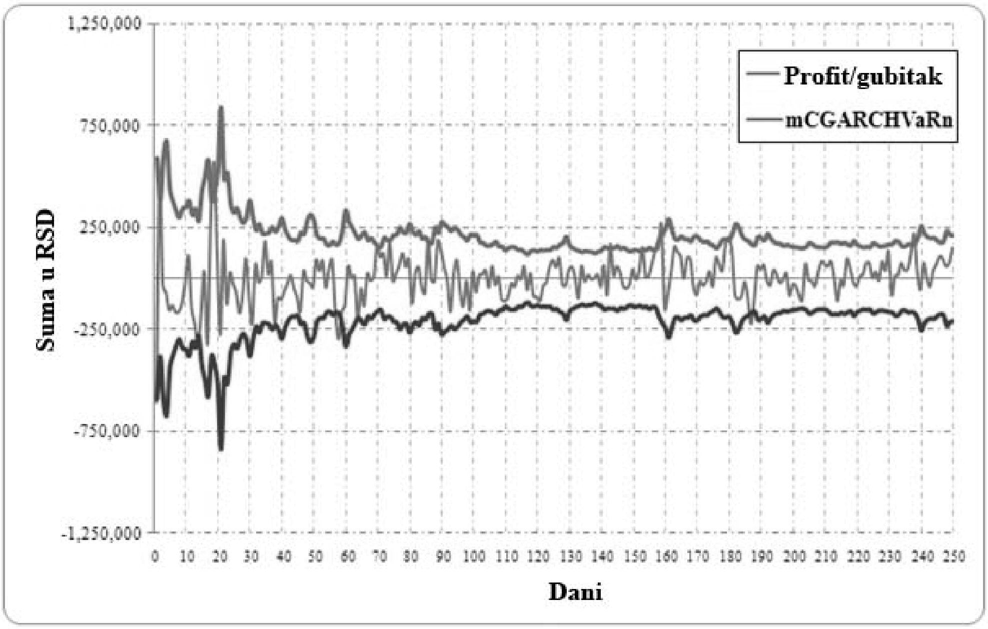
*Akcije: pokazuje broj akcija koje se drže. Blagajnički zapisi: pokazuje nominalnu vrednost u stranoj valuti. Strani kurs: pokazuje poziciju u stranoj valuti.
Portfelj: pozicija je izražena u RSD. Datum procene 11. septembar 2009.

Tabela 3: *Zbirna statistika za procenu VaR*

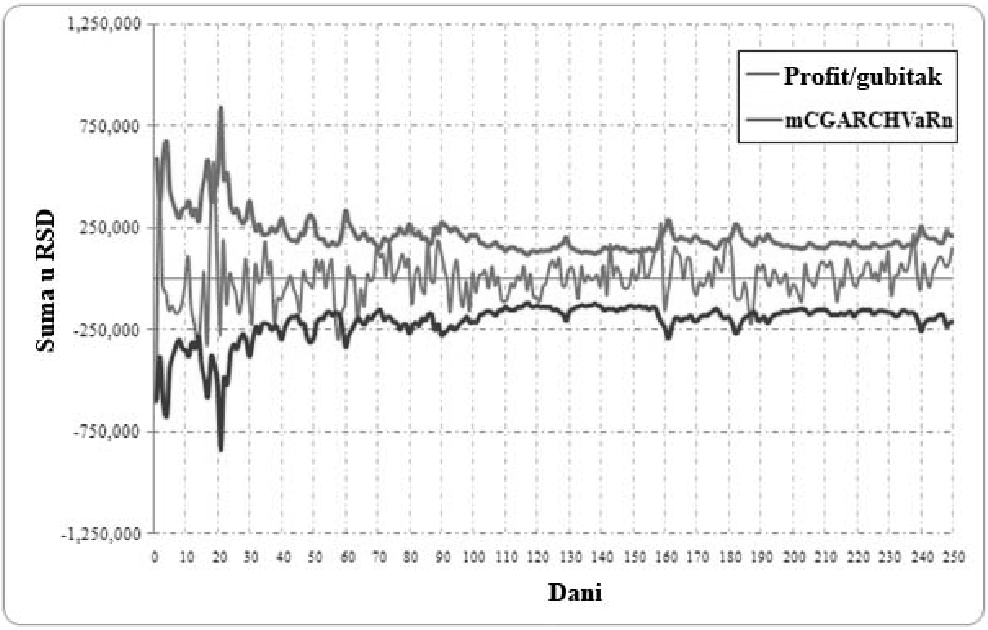
Značajno je da se zbirna statistika, DoF za Student-*t* distribuciju, kao i za sve potrebne parametre VaR preračunava za svih 250 „rolling windows“ kako bi obuhvatila i efekat inovacije prinosa iz svake ove stavke na procene VaR.

Empirijski rezultati dati su za multivarijacione VaR tehnike GARCH o kojima smo raspravljali u prethodnim poglavljima i koje je moguće primeniti u praksi. Mera VaR izračunata je u skladu sa nivoom poverenja od 99% i na osnovu perioda čuvanja od jedan dan. Tabele koje slede predstavljaju grafički prikaz metoda izračunavanja VaR.

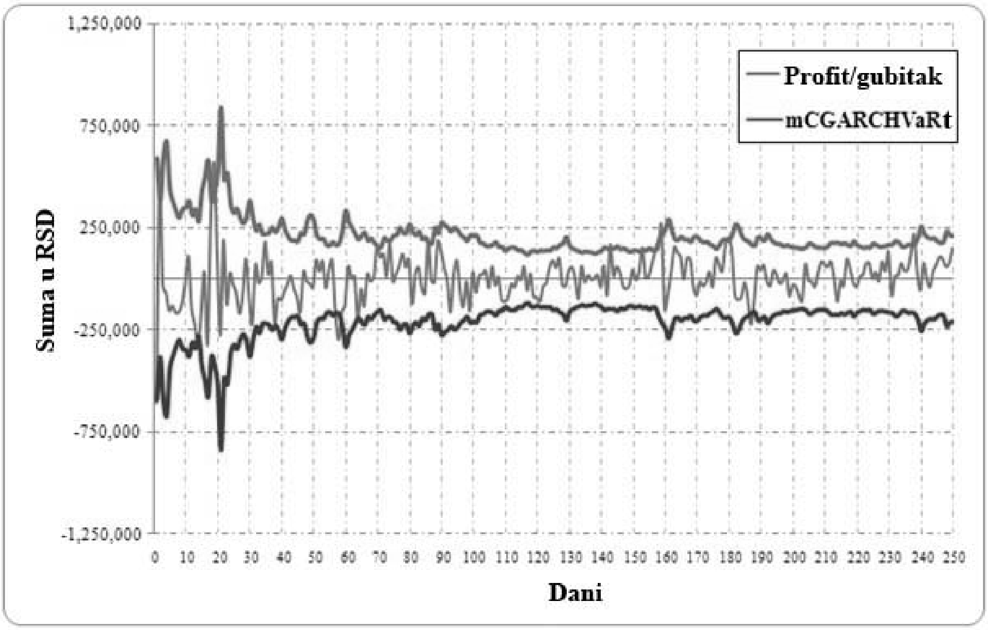
Svaki od ovih metoda primenili su i u celini programirali autori u MATLAB verziji R2009a. Jedini alat koji su koristili bio je tulboks za optimizaciju za ciljeve maksimizacije MLE. Sve ostale funkcije u celini su delo autora.



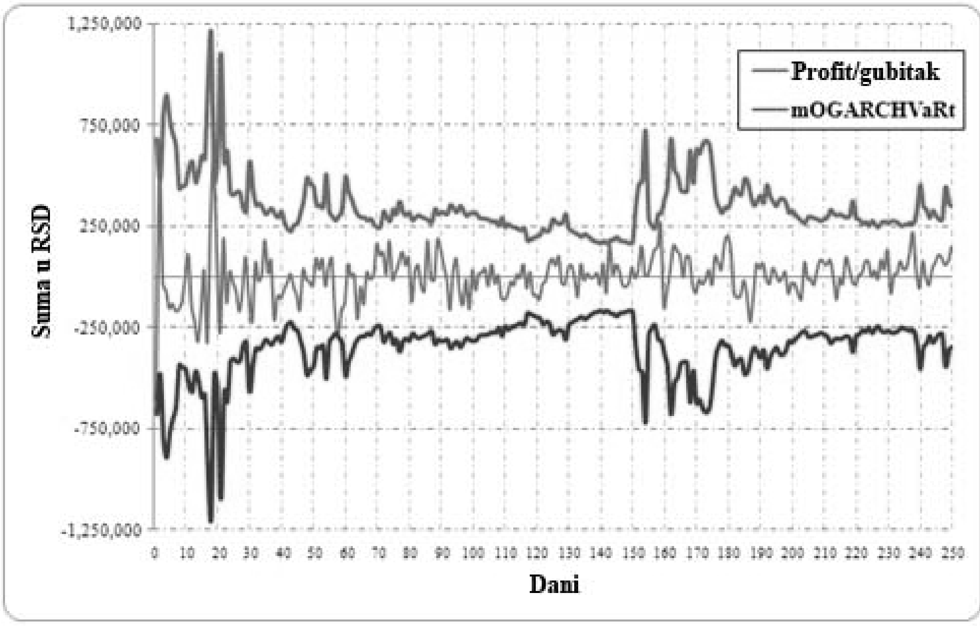
Slika 5: ***mCGARCHVaRn*** *– multivarijaciona konstantna korelacija GARCH (1,1) koja pretpostavlja normalno distribuirane prinose*



Slika 6: ***mCGARCHVaRt*** – *multivarijaciona konstantna korelacija GARCH (1,1) koja pretpostavlja Student's-t distribuciju prinosa*



Slika 7: ***mOGARCHVaRn*** – *multivarijaciona konstantna korelacija GARCH (1,1) koja pretpostavlja Student's-t distribuciju prinosa*



Slika 8: ***mOGARCHVaRt*** *– multivarijaciona konstantna korelacija GARCH (1,1) koja pretpostavlja Student's-t distribuciju prinosa*

Gore navedeni grafici rezultata prikazuju procenjene modele VaR sa ostvarenim profitima/gubicima hipotetičkog portfelja. Kao što je bilo reči u prethodnim poglavljima, VaR za dan *t* poredi sa sa profitom/gubitkom za dan *t +1*. Procene VaR prikazane su kao dve krajnje crvene linije koje se nalaze i na strani profita i na strani gubitka na svakoj slici. Do proboja dolazi svaki put kada plava linija koja predstavlja profit/gubitak probije nižu liniju VaR na strani gubitka.

VaR metod	VaR izuzeci					
	Dan 1	Dan 14	Dan 57	Dan 58	Dan 64	Dan 187
mCGARCHVaRn	-22,817	-43,833	-2,573	-127,342	-18,927	-59,534
mCGARCHVaRt	-45,227	0	0	-115,236	0	0
mOGARCHVaRn	-80,488	0	0	-71,010	0	-41,707
mOGARCHVaRt	0	0	0	-3,053	0	0

Tabela 4: *Proboji VaR u empirijskoj analizi*

Broj izuzetaka u odnosu na 99% VaR kreće se u rasponu 0 do 6 od 250 opservacija, što je blizu očekivanom broju od 250 · 0.01 = 2.5, što je na neki način određeno stepenom poverenja. 1. dana i 58. dana izračunavanja VaR, do proboja dolazi u skoro svakoj multivarijacionoj VaR tehnici GARCH. U periodu od 16. decembra 2008. do 16. June 2009. nije zabeležen ni jedan izuzetak. Stoga se može zaključiti da se izuzeci u odnosu na prikazane modele VaR učestalo javljaju oko istih datuma, što podstiče sumnju da je u tom trenutku možda bilo i nekih tržišnih šokova spolja. Ipak, da bismo stekli bolji uvid u performanse modela rizika, nastavljamo sa formalnim statističkim testiranjem i tumačenjem dobijenih vrednosti VaR.

VaR metod	Broj izuzetaka (NoE)	Basel II zona	Kupiec (prihvata za p > 0.05)	Prosečna VaR	Srednja vrednost proboja
mCGARCHVaRn	**6**	**ŽUTA**	**PRIHVATA(0.0593)**	212,597	45,838
mCGARCHVaRt	**2**	**ZELENA**	**PRIHVATA(0.7419)**	255,119	80,232
mOGARCHVaRn	**3**	**ZELENA**	**PRIHVATA(0.7579)**	255,650	64,402
mOGARCHVaRt	**1**	**ZELENA**	**PRIHVATA(0.2780)**	351,057	3,053

Tabela 5: *Analiza povratnog testiranja VaR*

Na tabeli 5 predstavljena je klasifikacija modela VaR na osnovu pristupa Bazel II u tri zone, a koko propisuju standardi Bazel II. Na tabeli 5 takođe vidimo da se minimalna prosečna VaR izračunava pomoću mCGARCHVARn, a minimalna magnituda proboja primenom metoda mOGARCHVaRt. Tri od četiri ispitana modela su u zelenoj zoni, ali jedan model VaR pada u žutu zonu. Ovo pokazuje da je potrebno dodatno ispitivanje da bi se otkrili potencijalni problemi u proceni rizika. Da bismo testirali da li je pojava izuzetaka koje pokriva VaR u skladu sa stepenom poverenja i da li gubici nastaju nezavisno jedan od drugoga, autor je primenio Kupiec test. Pravila odlučivanja u vezi sa prihvatanjem ili odbacivanjem nulte hipoteze zasnivaju se na odgovarajućoj statistici za racio verovatnoće i stepen značaja od 5%. *p*–vrednosti na tabeli 5 koje su prikazane u zagradama predstavljaju verovatnoće koje ukazuju na stope podbačaja koje se značajno razlikuju od verovatnoće koja iznosi 1%, na nivou 95% Kupiec testa. Do odbacivanja dolazi ako učestalost prekršaja daje vrednost $p<0.05$.

Prema Basel II, pošto su rezultati VaR statistički vrednovani, treba ih uzeti za određivanje minimuma regulatornog kapitala potrebnog za zaštitu od tržišnih rizika. Banka mora, na dnevnoj bazi, da zadovolji *troškove kapitala za tržišne rizike* koji su veći od:

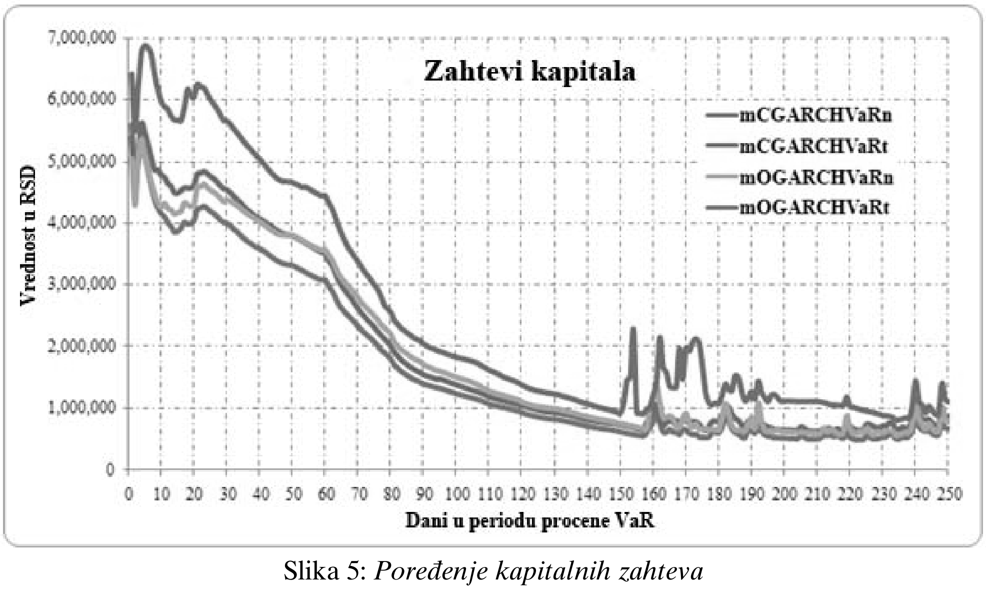
a) 10-dnevne cifre VaR prethodnog dana merene pomoću specifikovanih parametara
b) Proseka dnevnih 10-dnevnih VaR mera svakog od prethodnih šezdeset dana trgovanja pomnoženih multiplikator faktorom ($k+p$), gde je k obično na vrednosti 3, a p označava potencijalni porast multiplikator faktora usled loših rezultata povratnog testiranja[9].

Za potrebe zahteva kapitala koristi se pravilo "kvadratnog korena vremena" da bi se približno odredila 10-dnevna VaR na osnovu dobijene procene 1-dnevne VaR.

$$\mathrm{VaR}_{\alpha,10\mathrm{day}} = \sqrt{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{VaR}_{\alpha,1\mathrm{day}} \tag{45}$$

Dan	Datum	Zahtevi kapitala za tržišni rizik			
		mCGARCHVaRn	mCGARCHVaRt	mOGARCHVaRn	mOGARCHVaRt
1	17/09/2008	5,589,355	5,376,750	5,042,241	6,424,427
2	18/09/2008	4,606,742	4,479,332	4,290,507	5,490,305
3	19/09/2008	4,986,717	5,149,385	5,061,876	6,217,878
4	22/09/2008	5,329,657	5,601,625	5,360,787	6,785,079
5	23/09/2008	5,093,278	5,459,442	5,088,295	6,884,537
...	...	...	...	...	...
246	04/09/2009	549,597	715,950	625,292	887,451
247	07/09/2009	564,750	752,481	633,164	884,895
248	08/09/2009	726,373	967,517	1,031,379	1,394,188
249	09/09/2009	671,286	879,224	832,200	1,138,735
250	10/09/2009	659,041	874,804	780,262	1,091,479

Tabela 6: *Kapitalni zahtevi za tržišni rizik*



Slika 5: *Poređenje kapitalnih zahteva*

[9] Za više detalja videti [3]

Na slici 5 prikazana je vremenska ekspanzija kapitalnih zahteva. Poređenje pokazuje da su u toku prvih 60 dana kapitalni zahtevi veći nego u periodu posle 60. dana. Period posle 60. dana pokazuje da kapitalni zahtevi opadaju stabilnim tokom za sva četiri metoda. mCGARCHVaRt ostaje po svojoj prirodi volatilan, a ima još nekoliko izuzetnih situacija oko 152., 170., 185. i 240. dana. Istraživanje je pokazalo da mCGARCHVaRn ima najniže kapitalne zahteve za tržišni rizik. Njegova vremenska linija je stabilna do poslednjeg dana procene VaR što pokazuje da se neće preći neki realni teorijski nametnut limit za kapitalni zahtev za tržišni rizik. S druge strane, sva četiri metoda pokazuju slab porast trenda kapitalnih zahteva koji možda ukazuje na početak novog perioda nestabilnosti za profite i gubitke hipotetičkoh portfelja.

Zaključak

Model procene Vrednosti-pod-Rizikom predstavlja suštinski deo upravljanja tržišnim rizikom. Njegovo prepoznavanje i praktična primena uglavnom su motivisani usvajanjem regulatornih standarda Bazelskog komiteta za bankarski nadzor. Teorijski, menadžeri rizika imaju na raspolaganju ogroman broj metoda za procenu VaR, ali ima i mnogo neobičnosti o kojima treba da vode računa tokom procesa odlučivanja. Na primer, kad raspravljamo o tome koja je mera VaR najznačajnija, imamo različite kriterijume koji se moraju zadovoljiti, kao što su validacija modela, usklađivanje sa propisima i interni standardi banke. Stoga je neophodno testirati i porediti procene VaR na konkretnom portfelju i ustanoviti koliko ona vredi. U Srbiji, na primer, postoji naglašena potreba da se odabere odgovarajući model VaR da bi se približilo i uskladilo sa standardima Bazela II.

U ovom radu razmatramo, empirijski vrednujemo i testiramo skup multivarijacionih modela GARCH koji predstavljaju napredne tehnike za kvantitativnu procenu VaR. Šta više, dovodimo u vezu pretpostavke Normalne i Student's -*t* distribucije i ispitujemo ih u okviru ovih VaR tehnika. Konačno, primenjujemo i ispitujemo čitav jedan skup metoda da bi se našli najprimereniji modeli VaR za stepen poverenja od 99% i period držanja od 1 dan. Postupci povratnog testiranja predviđeni propisima primenjeni su da bi se vrednovali razmatrani modeli VaR i da bi se odabrao najprimereniji. Primenili smo dva pristupa povratnom testiranju pošto vrednovanje rezultata ima neposredne implikacije na proces odlučivanja kad se radi o izboru adekvatnog metoda VaR u banci, kao i na nivou kapitalnih troškova za tržišni rizik. Primenjeni su Bazel II test od tri zone i Kupiec test zasnovan na učestalosti gubitka na krajevima. Globalni cilj ovog rada bio je da odredi i poboljša preciznost i valjanost modelovanja rizika na tržištima u nastajanju, kakvo je srpsko tržište, a za praktične potrebe banaka koje se odnose na izračunavanje troškova kapitala za tržišne rizike.

LITERATURA

[1] Alexander, C. (2000). A Primer on the Orthogonal GARCH Model. University of Reading: ISMA Centre, The business School for Fiinancial Markets.

[2] Bank for International Settlement. (1996). Supervisory framework for the use of "Backtesting" in conjunction with the Internal models approach to market risk capital requirements. Basle Committee on Banking Supervision.

[3] Bank for International Settlement. (2005). Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks. Basel Committee on Banking Supervision

[4] Bank for International Settlement. (2006). International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework. Basel Committee on Banking Supervision .

[5] Berkowitz, J., & O'Brien, J. (2002). How Accurate Are Value-at-Risk Models at Commercial Banks? The Journal of Finance, Vol. 57, No.3 , 1093-1111.

[6] Bollersev, T., & Engle, R. (1993). Common Persistence in Conditional Variances. Econometrica , 31: 307-327.

[7] Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregresive Conditional Heteroskedasticity. Econometrics , 307-327.

[8] Bollerslev, T., Engle, R., & Wooldridge, J. (1988). A Capital-Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances. Journal of Political Economy 96(1) , 116-31.

[9] Božović, M. (2009). PhD thesis: Risks in Commodity and Currency Markets. Barcelona: Universitat Pampeu Fabra.

[10] Brooks, C. (2002). Introductory Econometrics for Finance. Cambridge: Cambridge University Press.

[11] Danielsson, J. (2006). Risk Modelling: Leacture Notes MS. risk.lse.ac.uk/upf .

[12] Dowd, K. (2002). Mearusing Market Risk. Chichester: John Wiley & Sons Ltd,.

[13] Engle, R. (2001). GARCH (1,1): The use of ARCH/GARCH models in Applied Exonometrics. Journal of Economic Perspectives, Volume 15 , 157-168.

[14] Engle, R., & Sheppard, K. (2002). Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH. San Diego: University of California.

[15] Hendricks, D., & Hirtle, B. (1997). Bank Capital Requirements for Market Risk: The Internal Models Approach. Economic Policy Review .

[16] Jorion, P. (2007). Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk. Third Edition. New York: McGraw-Hill.

[17] Kupiec, P. (1995). Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. Journal of Derivatives .

[18] National Bank of Serbia. (2008). Decision on Risk Management by Banks. RS Official Gazette , No.129/2007, 63/2008 and 112/2008.

[19] Silvennoinen, A., & Terasvirta, T. (2008). Multivariate GARCH models. Working Paper Series in Economics and Finance No. 669 .

[20] Simone Manganelli, R. E. (2001, August). Value at risk models in finance. European Central Bank: Working paper no.75 .

[21] Tsay, R. (2002). Analysis of Financial Time Series. Canada: John Wiley & Sons, Inc.

[22] Weide, R. v. (2002). GO-GARCH: A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model. Journal of Applied Econometrics, Vol.17 , 549-564.